No. of Printed Pages : 12 **BMTC–132**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BSCG/BSCM)

Term-End Examination

December, 2024

BMTC-132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***six*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***8****.*

(iii) Use of calculators is not allowed.

---

1. State whether the following statements are True *or* False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

(i) The differential equation :

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

is an exact differential equation.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ii) The differential equation :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

has order one and degree three.

(iii) $y = \tan(x + c)$ is a solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$.

(iv) The first order partial differential equation by eliminating the arbitrary constants a and b from the relation :

$$z = ax + by + a^2 + b^2$$

is $4z = p^2 + q^2$.

(v) If $w = x + 2y + z^2$, then $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial z \partial y}$.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

2. (a) Solve the differential equation : 4

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

(b) Solve the differential equation : 5

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0\,.$$

(c) Solve the differential equation : 6

$$ye^y = (y^3 + 2xe^y)\frac{dy}{dx}\,.$$

3. (a) Show that the limit of the function $f(x, y)$ exists at the origin, where :

$$f(x,y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{y} + y\cos\dfrac{1}{x}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Do the repeated limits of $f(x, y)$ exist ? Justify your answer. 7

(b) Solve the simultaneous equation : 8

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}\,.$$

4. (a) Solve the differential equation : 7

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0.$$

(b) Show that e^{2x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y'' - 5y' + 6y = 0$. Find the general solution too. 8

5\. (a) By the method of variation of parameters, solve : 8

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \log x.$$

(b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is continuous at $(0,0)$. Do the partial derivatives f_x and f_y exist at $(0,0)$? Justify your answer. 7

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

6. (a) By using the method of undetermined coefficients, find the general solution of the differential equation : 8

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=x-e^x.$$

(b) Verify that the differential equation is integrable and find its integral : 7

$$(y^2+yz)\,dx+(xz+z^2)\,dy+(y^2-xy)\,dz=0.$$

7. (a) Form a partial differential equation from $x^2+y^2=(z-c)^2\tan^2\alpha$. 7

(b) Find the general solution of : 8

$$(mz-ny)\,p+(nx-lz)\,q=ly-mx,$$

where $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

8. (a) Solve the partial differential equation : 7

$$pq + p + q = 0 .$$

(b) Find the complete integral of the partial differential equation using Charpit's method : 8

$$2xz - px^2 - 2q\,xy + pq = 0 .$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

BMTC–132

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी. एस-सी. जी./बी. एस. सी. एम.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2024
बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या **2** से **8** तक से कोई **छः** प्रश्न हल कीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 5×2=10

(i) अवकल समीकरण :

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

एक यथार्थ अवकल समीकरण है।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ii) अवकल समीकरण :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$$

में कोटि प्रथम और घात (डिग्री) तीन है।

(iii) $y = \tan(x+c)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ का हल है।

(iv) सम्बन्ध $z = ax + by + a^2 + b^2$ से स्वैच्छिक चरों a और b को हटाने पर बनने वाला प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण है :

$$4z = p^2 + q^2$$

(v) यदि $w = x + 2y + z^2$, तब $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial z \partial y}$ ।

2. (क) अवकल समीकरण :

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

का हल प्राप्त कीजिए। 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) अवकल समीकरण :

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए। 5

(ग) अवकल समीकरण :

$$ye^y = (y^3 + 2xe^y)\frac{dy}{dx}$$

का हल प्राप्त कीजिए। 6

3. (क) दिखाइए कि फलन $f(x, y)$ की सीमा उत्पत्ति पर विद्यमान होती है, जहाँ :

$$f(x,y) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{y} + y\cos\dfrac{1}{x}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

क्या $f(x, y)$ की पुनरावर्ती सीमाएँ पाई जाती हैं ? अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए। 7

(ख) युगपत समीकरण :

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

को हल कीजिए। 8

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

4. (क) अवकल समीकरण :

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$$

को हल कीजिए। 7

(ख) दिखाइए कि e^{2x} और e^{3x} $y'' - 5y' + 6y = 0$ के रैखिक रूप से निरपेक्ष हल हैं। इसका व्यापक हल भी प्राप्त कीजिए। 8

5. (क) प्राचल विचरण की विधि द्वारा :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \log x$$

का हल प्राप्त कीजिए। 8

(ख) दिखाइए कि फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ जिसे $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ द्वारा निर्धारित किया जाता है, $(0,0)$ पर सतत् है। क्या आंशिक अवकलज f_x और f_y का $(0,0)$ पर अस्तित्व होता है ? अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए। 7

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

6. (क) अनिर्धारित गुणांकों की विधि के प्रयोग द्वारा अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x - e^x$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए। 8

(ख) सत्यापित कीजिए कि अवकल समीकरण :

$$(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$$

समाकलनीय है और इसके समाकल भी प्राप्त कीजिए। 7

7. (क) $x^2 + y^2 = (z - c)^2 \tan^2 \alpha$ का आंशिक अवकल समीकरण बनाइए। 7

(ख) $(mz - ny)\,p + (nx - lz)\,q = ly - mx$ का व्यापक हल प्राप्त कीजिए, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ है। 8

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

8. (क) आंशिक अवकल समीकरण :

$$pq + p + q = 0$$

को हल कीजिए। 7

(ख) आंशिक अवकल समीकरण :

$$2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0$$

का चारपिट विधि से पूर्ण समाकल प्राप्त कीजिए।

8

× × × × × × ×

Downloaded from www.IGNOUBABA.com