No. of Printed Pages : 15 **BMTC–134**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2024

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

*(iii) Do any **six** questions from Question Nos. **1** to **7**.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) Show that $G = \left(\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\right)$ is a group under multiplication modulo 10. 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) In S_4, calculate $\sigma = (1\ 2\ 4)(2\ 3\ 4\ 1)^{-1}$. Also find the signature of σ. 3

(c) Find : 4

(i) $U(\mathbb{R})[x]$

(ii) $U(\mathbb{Z}_{12})$

(d) Give an example, with justification, of a subgroup of S_3 that is not normal in S_3. 2

2. (a) If : 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

then which of the following are defined ?

(i) $AB + C^t$

(ii) $BC + A^t$

For those that are defined calculate them.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) Find all the cosets of $\langle (2,3) \rangle$ in S_3. 3

(c) Find the centre of the ring (**P** (X), Δ, $\cap$), where X is a non-empty set. 2

(d) What is the statement of the division algorithm over K $[x]$, where K is a field. Also, prove this statement. 7

3. (a) Show that every finite integral domain is a field. Is the converse true ? Give reasons for your answer. 6

(b) Define a relation ~ on **Q** by $x \sim y$ iff $x - y \in \mathbf{Z}$. Check whether or not ~ is an equivalence relation. If it is find $\left[\frac{1}{3}\right]$, the equivalence class of 1/3. Else, define another relation on **Q**. 4

(c) Let G be a permutation group and $x \in G$. State and prove the equation that relates $Orb_G(x)$, $Stab_G(x)$ and o (G). 5

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

4. (a) Let :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

Check whether or not : 3

(i) S is a subring of $M_2(\mathbf{R})$.

(ii) S is an ideal of $M_2(\mathbf{R})$.

(b) Is $D_8 = HK$, for some proper subgroups H and K of D_8 ? Further, is $D_8 = H \times K$? Justify your answer. 4

(c) Use the fundamental theorem of homomorphisms to prove that : 8

$$\mathbf{Z}[x]/\langle x-15\rangle \simeq \mathbf{Z}.$$

5. (a) Let G be a group such that $f : G \to G$, $f(x) = x^2$ is a homomorphism. Must G be abelian ? Must G be cyclic ? Give reasons for your answers. 4

(b) Draw a subgroup diagram for $\mathbb{Z}_{28}$. 5

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) Let $f(x) \in F[x]$, F (x) is a field. Show that if $f(x)$ is irreducible, then $\langle f(x) \rangle$ is maximal. Is the converse true ? Why or why not ? 4

(d) Find *two* distinct elements of the quotient group $GL_2(\mathbf{R})/SL_2(\mathbf{R})$. 2

6. (a) Prove that the conjugate of an n-cycle is an n-cycle. 3

(b) Is $2x^5 + 20x^2 - 10x + 10$ irreducible over $\mathbf{Q}[x]$? Is it irreducible over $\mathbb{R}[x]$? Give reasons for your answers. 4

(c) Let G be an infinite group such that for any non-trivial subgroup H of G, $|G : H| < \infty$. Show that : 4

(i) $H \leq G \Rightarrow H = \{e\}$ or H is infinite.

(ii) If $g \in G$, $g \neq e$, then o (g) is infinite.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(d) Show that every ideal of R/I is of the form J/I, where R is commutative ring with unity and I and J are ideals of R. 4

7. (a) Use the fundamental theorem of homomorphism of groups to show that : 7

$$\frac{GL_2(\mathbf{R})}{SL_2(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*.$$

(b) Apply the Euclidean algorithm to find integers s and t such that $21s + 13t = (21, 13)$. 5

(c) Let G be a finite group, H normal in G and $a \in G$ such that o (Ha) = 3 and o (H) = 10. Find all the possible orders of a. 3

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 10

(i) A ring of characteristic 2 is finite.

(ii) Every non-cyclic group is non-abelian.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(iii) If G is a finite group and $n \mid o(G)$, then any generating set of G has at least n elements.

(iv) If H is a subgroup of a group G and $a \in G$, then H_a is a subgroup of G.

(v) If σ is an even permutation it must be a product of 2 disjoint cycles.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

BMTC–134

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

*(ii) प्रश्न संख्या **8** करना अनिवार्य है।*

*(iii) प्रश्न संख्या **1** से **7** तक से कोई भी **छः** प्रश्न हल कीजिए।*

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) दिखाइए कि $G = (\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8})$ गुणन मॉड्यूलो 10 के सापेक्ष एक आव्यूह है। 6

   (ख) S_4 में $\sigma = (1\ 2\ 4)(2\ 3\ 4\ 1)^{-1}$ परिकलित कीजिए। σ का चिह्नक ज्ञात कीजिए। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) ज्ञात कीजिए : 4

(i) $U(\mathbf{R})[x]$

(ii) $U(\mathbf{Z}_{12})$

(घ) पुष्टि के साथ S_3 के एक उपसमूह का उदाहरण दीजिए जो S_3 में प्रसामान्य नहीं है। 2

2. (क) यदि : 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

तथा $$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

तो निम्नलिखित में से कौन-सी परिभाषित हैं ?

(i) $AB + C^t$

(ii) $BC + A^t$

जो परिभाषित हैं उनको परिकलित कीजिए।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) S_3 में $\langle(2\,3)\rangle$ के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए। 3

(ग) वलय $(\mathbf{P}(X), \Delta, \cap)$ का केन्द्र ज्ञात कीजिए, जहाँ X एक अरिक्त समुच्चय है। 2

(घ) $K[x]$ पर विभाजन-कलन विधि का कथन क्या है, जहाँ K एक क्षेत्र है। इस कथन को सिद्ध भी कीजिए। 7

3. (क) दिखाइए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र है ? क्या इस कथन का विलोम सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(ख) **Q** पर $x \sim y$ यदि और केवल यदि $x - y \in \mathbf{Z}$ द्वारा एक संबंध परिभाषित कीजिए। क्या ~ एक तुल्यता संबंध है ? यदि है, तो $1/3$ का तुल्यता वर्ग $\left[\frac{1}{3}\right]$ ज्ञात कीजिए। अन्यथा **Q** पर एक अन्य संबंध परिभाषित कीजिए। 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) मान लीजिए कि G एक क्रमचय समूह है। $\text{Orb}_G(x)$, $\text{Stab}_G\ (x)$ और $o(G)$ को मिलाने (जुड़ने) वाला एक संबंध बताइए और सिद्ध भी कीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए कि :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$$

जाँच कीजिए कि : 3

(i) S वलय $M_2(\mathbf{R})$ का उपवलय है या नहीं।

(ii) S $M_2(\mathbf{R})$ की गुणजावली है या नहीं।

(ख) क्या D_8 के कुछ उचित उपसमूह H और K के लिए $D_8 = HK$ है ? आगे $D_8 = H \times K$ है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) समाकारिता का मूल प्रमेय प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 8

$$\mathbf{Z}[x]/\langle x-15\rangle \simeq \mathbf{Z}$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

5. (क) मान लीजिए G एक समूह है जिसके लिए $f : G \to G,\ f(x) = x^2$ एक समाकारिता है । क्या G आबेली होना चाहिए ? क्या G चक्रीय होना चाहिए ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ख) $\mathbb{Z}_{28}$ का उपसमूह आरेख बनाइए। 5

(ग) मान लीजिए कि $f(x) \in F[x]$, $F[x]$ एक क्षेत्र है। दिखाइए कि यदि $f(x)$ अखण्डनीय है तो $\langle f(x) \rangle$ एक उच्चिष्ट गुणजावली है। क्या इस कथन का विलोम सत्य है ? क्यों या क्यों नहीं ? 4

(घ) विभाग समूह $GL_2(\mathbf{R}) / SL_2(\mathbf{R})$ में **दो** अलग-अलग अवयव ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक n-चक्र का संयुग्मी एक n-चक्र है। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) क्या $2x^5 + 20x^2 - 10x + 10$ **Q** [x] पर अखण्डनीय है ? क्या यह $\mathbb{R}[x]$ पर अखण्डनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) मान लीजिए G एक अनन्त समूह है जिसमें कोई भी अतुच्छ उपसमूह H के लिए $|G : H| < \infty$। दिखाइए कि : 4

(i) $H \le G \Rightarrow H = \{e\}$ या H अनन्त है।

(ii) यदि $g \in G, g \ne e,$ तो $o(G)$ अनन्त है।

(घ) दिखाइए कि R/I का प्रत्येक गुणजावली J/I के रूप में है, जहाँ R एक क्रमविनिमेय तत्सम की वलय है तथा I एवं J, R की गुणजावलियाँ हैं। 4

7. (क) समूह की समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग करके दिखाइए कि : 7

$$\frac{GL_2(\mathbf{R})}{SL_2(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) यूक्लिडीय कलन विधि का प्रयोग करके पूर्णांक s और t ज्ञात कीजिए जिसके लिए $21s+13t=(21,13)$। 5

(ग) मान लीजिए G एक परिमित समूह है और H G का एक प्रसामान्य उपसमूह है $\alpha \in G$ जिनके लिए $o(H_a)=3$, और $o(H)=10$। a की कोटि के सभी संभावित मान ज्ञात कीजिए। 3

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा कीजिए, जो भी उचित है : 10

(i) अभिलक्षण 2 वाला वलय परिमित है।

(ii) प्रत्येक अचक्रीय समूह अनबेली है।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(iii) यदि G एक परिमित समूह है और $n | o(G)$, तो G के प्रत्येक जनित करने वाले आव्यूह में कम से कम n अवयव होते हैं।

(iv) यदि समूह H समूह G का उपसमूह है और $a \in G$, तो H_a G का उपसमूह है।

(v) यदि σ एक सम क्रमचय है, तो यह दो असंयुक्त चक्रों का गुणनफल होना चाहिए।

× × × × × × ×

Downloaded from www.IGNOUBABA.com