

No. of Printed Pages : 14

BMTE–144

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

(BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)

Term-End Examination

December, 2024

BMTE–144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **six** questions from Q. Nos.*

2 to 8.

(iii) *Use of scientific non-programmable
calculators is allowed.*

(iv) *Symbols have their usual meanings.*

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : $2 \times 5 = 10$

(i) The equation :

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

has a root in the interval $[5, 6]$.

(ii) $E^{1/2}\delta = \Delta$.

(iii) The order of convergence of the Newton-Raphson method is 3.

(iv) The method :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \frac{3}{x_n}$$

does not converge to any value for any choice of initial approximation.

(v) The largest eigen value of any square matrix A is the spectral radius of A.

2. (a) Using Newton-Raphson method, find an iterative formula to compute the square root of $a, a > 0$. Also, using this formula, find $\sqrt{2}$ upto three decimal places. 5

- (b) Show that : 5

$$(E + 1)\delta = 2(E - 1)\mu$$

- (c) Find the inverse of the matrix : 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

using the Gauss-Jordan method.

3. (a) Perform three iterations to find the root of the equation $e^x - 3x = 0$ using Bisection method with initial interval $[1.5, 1.6]$. 8

- (b) Given that :

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(3) = 55,$$

find the Lagrange's interpolating polynomial fits this data. Also, find the bound on the error at $x = 2.2$. 7

4. (a) Use the Euler's method to solve numerically the initial value problem :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}, \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 1$$

with $h = 0.5$ on the interval $[0, 3]$. 5

- (b) Using Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.1$, find an approximate value of $y(0.1)$ for the initial value problem $y' = 2y + 3e^x$, $y(0) = 0$. 5

- (c) Evaluate $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ using Simpson's rule with $h = 0.25$, compares with exact value. 5

5. (a) Using Newton's divided difference interpolation formula, find the value of $f(8)$ and $f(15)$ from the following table : 8

x	$f(x)$
4	48
5	100
7	294
10	900
11	1210
13	2028

- (b) Solve the following system of equations : 7

$$2x + y + z = 10$$

$$3x + 2y + 3z = 18$$

$$x + 4y + 9z = 16$$

using Gauss Elimination method.

6. (a) Divide the polynomial :

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

by $(x-3)$ the synthetic division method
and find remainder. 5

- (b) Find $f'(x)$ and $f''(x)$ given f_0, f_1, f_2 at x_0, x_1, x_2 respectively using the Lagrange's interpolation method. 5

- (c) If f is a polynomial of degree n defined on $n+1$ equally spaced points $x_0, x_1, \dots, x_n$ with step size h , then show that $\Delta^{n+1}f(x_i) = 0 \quad \forall i$. 5

7. (a) Find the smallest eigen value in magnitude and the corresponding eigen vector of the following matrix : 8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Use the four iterations of the inverse power method using initial vector $[1, 1, 1]^T$.

- (b) the value of x (in degrees) and $\sin x$ are given in the following table : 7

x (in degrees)	$\sin x$
15	0.2588190
20	0.3420201
25	0.4226183
30	0.5
35	0.5735764
40	0.6427876

Determine the value of $\sin 38^\circ$.

8. (a) Using the Taylor's series method of order 4, solve :

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 1.$$

Find the value of $y(0.1)$ with $h = 0.1$. 5

- (b) Using the Euler's method, find the solution of IVP :

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

in the interval $[0, 1]$ taking $h = 0.2, 0.1$. Using Richardson's extrapolation technique, obtain the improved value at $t = 1$. 5

- (c) Find the one root of the polynomial equation :

$$x^3 + x - 3 = 0$$

in the interval $[1, 2]$. Using Birge-Vieta method, perform only two iterations. 5

BMTE-144

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस. सी. एम./

बी. ए. एम./बी. एस. सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

बी. एम. टी. ई.-144 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 8 तक से कोई छः प्रश्न हल
कीजिए।

(iii) वैज्ञानिक अप्रोग्रामनीय कैल्कुलेटर का प्रयोग
करने की अनुमति है।

(iv) सभी संकेतों के अर्थ सामान्य हैं।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : $5 \times 2 = 10$

(i) समीकरण $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ का एक मूल अंतराल $[5, 6]$ में है।

(ii) $E^{1/2}\delta = \Delta$.

(iii) न्यूटन-राफ्सन विधि के अभिसार की कोटि 3 है।

(iv) किसी भी प्रारम्भिक सन्निकटन के साथ विधि

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \frac{3}{x_n} \quad \text{किसी भी मान के लिए}$$

अभिसरित नहीं होती है।

(v) किसी भी वर्ग आव्यूह A की अधिकतम आइगेन मान A की स्पेक्ट्रम त्रिज्या होती है।

2. (क) न्यूटन-राफ्सन विधि का प्रयोग करके, $a, a > 0$ का मान निकालने के लिए पुनरावृत्ति सूत्र ज्ञात कीजिए। इस सूत्र का प्रयोग करके $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के तीन स्थानों तक निकालिए। 5

(ख) दर्शाइए कि : 5

$$(E + 1)\delta = 2(E - 1)\mu$$

- (ग) गाउस-जोर्डन विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (क) समद्विभाजन विधि का प्रयोग, प्रारम्भिक अंतराल $[1.5, 1.6]$ के साथ करके समीकरण $e^x - 3x = 0$ के मूल ज्ञात करने के लिए तीन पुनरावृत्तियाँ निकालिए। 8

- (ख) दिया गया है :

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(3) = 55$$

इस आँकड़े के लिए लैग्रांज अंतर्वंशी बहुपद फिट कीजिए। $x = 2.2$ पर त्रुटि का परिबद्ध भी निकालिए। 7

4. (क) आदिमान समस्या :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}, 1 \leq x \leq 3, y(1) = 1$$

का अंतराल $[0, 3]$ पर $h = 0.5$ के साथ आइलर विधि का प्रयोग करके संख्यात्मक हल ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) $h = 0.1$ के साथ रूंग-कुट्टा चतुर्थ कोटि का प्रयोग करके आदिमान समस्या $y' = 2y + 3e^x$, $y(0) = 0$ के लिए $y(0.1)$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) सिम्पसन के नियम का प्रयोग करके $h=0.25$ के

साथ $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए और

उसकी सही मान के साथ तुलना भी कीजिए। 5

5. (क) निम्नलिखित तालिका के लिए न्यूटन के विभाजित अंतर अंतर्वेशी सूत्र का प्रयोग करके $f(8)$ और $f(15)$ का मान ज्ञात कीजिए : 8

x	$f(x)$
4	48
5	100
7	294
10	900
11	1210
13	2028

(ख) गाउस निराकरण विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरण

संकाय को हल कीजिए : 7

$$2x + y + z = 10$$

$$3x + 2y + 3z = 18$$

$$x + 4y + 9z = 16$$

6. (क) बहुपद :

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

को सांश्लेषण विभाजन विधि से $(x-3)$ द्वारा विभाजित कीजिए इस प्रकार शेषफल भी निकालिए। 5

(ख) लैग्रांज की अंतर्वेशी विधि द्वारा $f'(x)$ और $f''(x)$ निकालिए जबकि f_0, f_1, f_2 क्रमशः x_0, x_1, x_2 पर दिए गये हैं। 5

(ग) यदि n कोटि की एक बहुपद f , समान रूप से स्थापित $n+1$ बिन्दुओं $x_0, x_1, \dots, x_n$ पर आमाप आकार h के साथ, तो दर्शाइए कि : 5

$$\Delta^{n+1} f(x_i) = 0 \quad \forall i$$

7. (क) निम्नलिखित आव्यूह के लिए न्यूनतम माप की आइगेन मान और उसका संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए : 8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रारम्भिक सदिश $[1, 1, 1]^T$ का प्रयोग करके व्युत्क्रम घात विधि की चार पुनरावृत्तियों का उपयोग कीजिए।

(ख) x (degree में) और $\sin x$ के मान निम्नलिखित तालिका में दिए गए हैं : 7

x (in degrees)	$\sin x$
15	0.2588190
20	0.3420201
25	0.4226183
30	0.5
35	0.5735764
40	0.6427876

$\sin 38^\circ$ का मान निकालिए।

8. (क) कोटि 4 की टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके

$$y' = x - y^2, y(0) = 1 \text{ हल कीजिए। } h = 0.1 \text{ के}$$

साथ $y(0.1)$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) $h = 0.2, 0.1$ के साथ अंतराल $[0,1]$ में IVP

$$y' = -2ty^2, y(0) = 1 \text{ का आयलर विधि से हल}$$

ज्ञात कीजिए। $t = 1$ पर रिचर्डसन की बहिर्वेशी

विधि का प्रयोग करके संशोधित मान ज्ञात

कीजिए। 5

(ग) अंतराल $[1,2]$ में बहुपद समीकरण $x^3 + x - 3 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिए। बिरजे-विटा विधि का प्रयोग करके केवल दो पुनरावृत्ति प्रदर्शित कीजिए।

5

× × × × × × ×