No. of Printed Pages : 12

BMTC–132

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/BACHELOR OF ARTS (GENERAL)/BACHELOR OF SCIENCE (MULTIDISCIPLINARY)/ BACHELOR OF ARTS (MULTIDISCIPLINARY)/BACHELOR OF SCIENCE (MATHEMATICS) (BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)

Term-End Examination

December, 2025

BMTC–132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) All questions are compulsory.*

(ii) Use of calculator is not allowed.

(iii) Symbols have their usual meanings.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

1. State whether the following statements are true *or* false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

   (a) If $\cos\alpha$, $\cos\beta$ and $\cos\gamma$ are the direction cosines of a line, then $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

   (b) For

$$f(x,y)=\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2},\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$$

   (c) For $z(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

   (d) The family of parabolas $y^2=2cx+c^2$, c being a constant is self orthogonal.

   (e) The solution of the differential equation $\left(D^4-1\right)y=0$, is $c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$.

2. (a) Solve the differential equation : 5

$$2x^3y\,dx+\left(x^4+y^4\right)dy=0,\quad x>0,\ y>0.$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) Solve : 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

(c) Solve : 5

$$\left(3x^2y^4 + 2xy\right)dx + \left(2x^3y^3 - x^2\right)dy = 0$$

3. (a) Solve : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x + 4$$

(b) Find the equation of plane passing through the points (1, 3, 2), (3, –1, 6) and (5, 2, 0). 5

(c) Check the continuity of the function at (0, 0) : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. (a) Find $\frac{dz}{dt}$ if $z = xy, x = t$ and $y = e^t$. 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) Draw a rough sketch of the level curves for the following function for the values of c given : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad c = 1, 4, 9$

(ii) $f(x, y) = \frac{x}{y}, \qquad c = 0, 1, -1$

(c) Verify Cauchy-Schwarz inequality for : 5

$$a = \left(0, -1, \sqrt{3}\right) \text{ and } b = (-3, 0, 4)$$

5. (a) Show that $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ for the function $f : \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}$ defined by : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) If $z = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$, then show that : 5

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z .$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) The population of a town grows at a rate proportional to the population at any time. Its initial population of 500 increases by 15% in 10 years. What will be the population in 30 years ? 5

6. (a) Solve : 5

$$p^2y + 2px = y$$

(b) Find the solution of differential equation : 6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x\ ,$$

using the method of undertermined coefficients.

(c) Find the differential equation of the space curves in which the families of surfaces : 4

$$u = xy = c_1$$

and $v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$

intersect.

7. (a) Solve : 5

$(1 + xy)\, y\, dx + (1 - xy)\, x\, dy = 0,\ x > 0,\ y > 0$.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) Find all the second order partial derivatives of the function : 5

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \sin x^4$$

(c) If y_1 and y_2 are functions of x possessing derivatives at least upto first order, then y_1 and y_2 are linearly dependent iff their Wronskian $w(y_1, y_2) = 0$. Prove. 5

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

BMTC–132

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)/विज्ञान स्नातक (बहुविषयक)/कला स्नातक (बहुविषयक)/विज्ञान स्नातक (गणित)

(बी. एस.-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस.-सी. एम./ बी. ए. एम./बी. एस.-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(ii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iii) संकेतों के अपने अर्थ सामान्य हैं।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

$5\times2=10$

(क) यदि $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ एक रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं, तो $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ होगा।

(ख) $f(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ के लिए

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=0$$

है।

(ग) $z(x,y)=\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ के लिए

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

है।

(घ) परवलयों का परिवार $y^2=2x+c^2$, जहाँ c एक अचर है, स्वयं लांबिक (ऑर्थोगोनल) है।

(ङ) अवकल समीकरण $\left(D^4-1\right)y=0$ का हल $c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$ है।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

2. (क) अवकल समीकरण : 5

$$2x^3y\,dx + \left(x^4 + y^4\right)dy = 0, x > 0, y > 0$$

को हल कीजिए।

(ख) हल कीजिए : 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

(ग) हल कीजिए : 5

$$\left(3x^2y^4 + 2xy\right)dx + \left(2x^3y^3 - x^2\right)dy = 0$$

3. (क) हल कीजिए : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x + 4$$

(ख) बिन्दुओं (1, 3, 2), (3, –1, 6) और (5, 2, 0) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

(ग) फलन : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

की (0, 0) पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

4. (क) यदि $z = xy, x = t$ और $y = e^t$ है, तो $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिए गए c के मान के लिए निम्नलिखित फलन के लिए स्तर वक्र का एक कच्चा रेखाचित्र बनाइए : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad c = 1, 4, 9$

(ii) $f(x, y) = \frac{x}{y}, \qquad c = 0, 1, -1$

(ग) $a = \left(0, -1, \sqrt{3}\right)$ और $b = (-3, 0, 4)$ के लिए कौशी–श्वार्ज़ असमानता को सत्यापित कीजिए। 5

5. (क) दर्शाइए कि परिभाषित फलन $f : \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}$: 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ ।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) यदि $z = \tan^{-1}\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ है, तो दर्शाइए कि : 5

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z$$

(ग) एक शहर की जनसंख्या में किसी (उस) समय की जनसंख्या के समानुपात की दर पर वृद्धि होती है। उसकी प्रारम्भिक जनसंख्या 500 में 10 वर्षों में 15% वृद्धि हो जाती है। 30 वर्षों में यह जनसंख्या कितनी हो जाएगी ? 5

6. (क) हल कीजिए : 5

$$p^2y + 2px = y$$

(ख) अनिर्धारित गुणांकों की विधि के उपयोग द्वारा अवकल समीकरण : 6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$$

को हल कीजिए।

(ग) समष्टि वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनमें पृष्ठों $u = xy = c_1$ और $v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$ के कुल प्रतिच्छेद करते हैं। 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

7. (क) हल कीजिए : 5

$$(1+xy)\,y\,dx+(1-xy)\,x\,dy=0, x>0, y>0\,.$$

(ख) फलन $f(x,y)=x^4+y^4\sin x^4$ के सभी दूसरे क्रम के आंशिक अवकल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) यदि y_1 एवं y_2 कम से कम पहले क्रम तक के अवकल गुणांक रखने वाले के x फलन हैं, तब सिद्ध कीजिए कि y_1 एवं y_2 रैखिक निर्भर होंगे यदि और केवल यदि उनका रांसकियन $w(y_1, y_2)=0$ है। 5

× × × × ×

Downloaded from www.IGNOUBABA.com