No. of Printed Pages : 19 **BMTC–134**

B. A. (GENERAL)/B. SC. (GENERAL)/ B. SC. (MATHEMATICS) (BAG/BSCG/BSCFMT)

Term-End Examination

December, 2025

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

*(iii) Do any **six** questions from Q. No. **1** to Q. No. **7**.*

(iv) Show your rough work at the bottom or on the right side of the page.

(v) Use of calculators is not allowed.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

1. (a) List the elements of the symmetric group S_3 and write down the orders of each of its elements. 5

(b) Prove or disprove : The union of two subgroups of a group G is a subgroup of G. 3

(c) Define an ideal. List all the ideals of the ring of real quarternions. 4

(d) Find the nil radical of $\mathbb{Z}_8$. 3

2. (a) Show that every subgroup of an abelian group G is a normal subgroup of G. Is it necessarily true that if every subgroup of a group G is a normal subgroup of G, then G is abelian ? Justify your answer. 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) If $GL_2(\mathbb{C})$ denotes the group of all 2×2 non-singular matrices over $\mathbb{C}$ and if $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{C} \\ ac \neq 0 \end{matrix} \right\}$, then check whether or not H is a subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$. Further, if H is a subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$ check whether or not H is a normal subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$. 4

(c) For a prime p, show that the polynomial $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ is irreducible over $Q[x]$. 5

3. (a) Prove that any cyclic group is abelian. Is the converse true ? Give reasons for your answer. 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) If $f : A_5 \to G$ is a non-trivial group homomorphism, prove that $O(G) \geq 60$. 3

(c) Let $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ and

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Prove the following : 8

(i) R is a subring of $M_2(\mathbb{R})$ with identity.

(ii) I is an ideal of $\mathbb{R}$.

(iii) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{R}$.

4. (a) Determine all ring homomorphisms from $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$. 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) Express $f(x)$ as $g(x)q(x) + r(x)$, where $r(x) = 0$ or deg $r(x) <$ deg $g(x)$, where : 3

$$f(x) = x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$$

and $$g(x) = \overline{3}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$$

(c) Find all the prime ideals of the ring $\mathbb{Z}_{28}$. 6

5. (a) Show that $x^3 + 6x^2 + 30x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ is irreducible using Mod p irreducibility test. 4

(b) (i) Show that if G is a group and $x \in \mathrm{G}$ has odd order, there exists a $y \in \mathrm{G}$ such that $y^2 = x$. 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ii) Show that the converse of Lagrange's theorem is not true. 5

(c) Show that $\mathbb{Z}_n$ is a field iff n is a prime. 3

6. (a) Find all subgroups of $\mathbb{Z}_{42}$ and give a subgroup diagram for $\mathbb{Z}_{42}$. 6

(b) Find the signature of : 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

(c) Show that :

$$\frac{GL_2(\mathbb{R})}{SL_2(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^*,$$

where $GL_2(\mathbb{R})$ is the group of 2×2 non-singular matrices over $\mathbb{R}$, $SL_2(\mathbb{R})$ is

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

the group of 2×2 matrices over $\mathbb{R}$ with determinant 1 and $\mathbb{R}^*$ is the group of non-zero real numbers. 5

7. (a) State the orbit-stabilizer theorem. If X is a finite non-empty set, G is a subgroup of S(X) and there is an $x \in X$ such that $\left|\operatorname{Orb}_G(x)\right| = 2$, show that $\operatorname{Stab}_G(x) \triangleleft G$. 3

(b) Let :

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n = 2^a\ 3^b, a, b \in \mathbb{Z}, a, b, \geq 0 \right\}.$$

Check whether R is a ring under the usual addition and multiplication of rational numbers. Is it commutative ? Does it have an identity element ? Justify your answer. 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) Let F be a field and $p(x) \in F[x]$ with deg $p(x) \geq 2$. If $p(x)$ is irreducible in $F[x]$, then prove that $p(x)$ has no roots in F. Is the converse true ? Give reasons for your answer. 3

(d) For $m, n, \in \mathbb{Z}$, show that $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$, where $l = [m, n]$, the l.c.m. of n and m. 3

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof a counter-example whichever is appropriate. Marks will be given only for proper justification. 10

(a) There is no infinite field of characteristic $p \neq 0$.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(b) There exists an infinite group G in which every element of G is of finite order.

(c) The symmetric group S_n is simple for every $n \geq 5$.

(d) Any polynomial of degree $n \geq 1$ over a commutative ring R has atmost n roots in R.

(e) Every prime ideal of a ring R is a maximal ideal of R.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

BMTC–134

कला स्नातक (सामान्य)/विज्ञान स्नातक

(सामान्य)/विज्ञान स्नातक (गणित)

(बी. ए. जी./बी. एस-सी. जी./

बी. एस.-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

नोट : *(i)* *इस प्रश्न-पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) *प्रश्न संख्या **8** अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या **1** से **7** तक से कोई भी **छः** प्रश्न कीजिए।*

(iv) *अपना रफ कार्य पृष्ठ के नीचे या दायीं ओर दिखाइए।*

(v) *कैल्कुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) सममित समूह S_3 के अवयवों की सूची बनाइए और उसके प्रत्येक अवयव की कोटि लिखिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए या असत्य सिद्ध कीजिए : समूह G के दो उपसमूहों का सम्मिलन G का उपसमूह होता है। 3

(ग) गुणजावली को परिभाषित कीजिए। वास्तविक चतुष्टियों की वलय की सभी गुणजावलियों की सूची बनाइए। 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(घ) $\mathbb{Z}_8$ की शून्य करणी निकालिए। 3

2. (क) दिखाइए कि एक आबेली समूह G का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह होता है। क्या यह जरूरी है कि यदि एक समूह G के सभी उपसमूह प्रसामान्य हैं, तो G आबेली समूह होना चाहिए ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(b) यदि $GL_2(\mathbb{C})$ $\mathbb{C}$ पर सभी 2×2 अव्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समूह है और यदि $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{C} \\ ac \neq 0 \end{matrix} \right\}$, तो जाँच कीजिए कि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है या नहीं। आगे, यदि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है, तो जाँच कीजिए कि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है या नहीं। 4

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) एक अभाज्य संख्या p के लिए दिखाइए कि बहुपद $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$, $Q[x]$ पर अखण्डनीय है। 5

3. (क) सिद्ध कीजिए कि सभी चक्रीय समूह आबेली होते हैं। क्या इस कथन का विलोम सत्य है ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 4

(ख) यदि $f : A_5 \to G$ एक अतुल्य समूह समकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि $O(G) \geq 60$. 3

(ग) मान लीजिए कि $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

और $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \right\}$ ।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : 8

(i) R वलय $M_2(\mathbb{R})$ की तत्समकी उपवलय है।

(ii) I वलय R की गुणजावली है।

(iii) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{R}$.

4. (क) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक सभी वलय समाकारिता निर्धारित कीजिए। 6

(ख) $f(x)$ को $g(x)q(x) + r(x)$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ $r(x) = 0$ या $\deg r(x) < \deg g(x)$, जहाँ : 3

$$f(x) = x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$$

तथा $$g(x) = \overline{3}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$$

(ग) वलय $\mathbb{Z}_{28}$ की सभी अभाज्य गुणजावली निकालिए। 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

5. (क) Mod p अखण्डनीय परीक्षण द्वारा दिखाइए कि बहुपद

$x^3 + 6x^2 + 30x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ अखण्डनीय है। 4

(ख) (i) दिखाइए कि यदि G एक समूह है और $x \in G$ विषम कोटि वाला अवयव है, तो एक $y \in G$ का अस्तित्व है, जिसके लिए $y^2 = x$ है। 3

(ii) दिखाइए कि लैग्रांज प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है। 5

(ग) दिखाइए कि $\mathbb{Z}_n$ क्षेत्र होता है तभी और केवल तभी जबे n एक अभाज्य संख्या है। 3

6. (क) $\mathbb{Z}_{42}$ के सभी उपसमूह ज्ञात कीजिए और $\mathbb{Z}_{42}$ का उपसमूह आरेख दीजिए। 6

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) क्रमचय $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ का चिह्नक निकालिए। 4

(ग) दिखाइए कि :

$$\frac{GL_2(\mathbb{R})}{SL_2(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^*,$$

जहाँ $GL_2(\mathbb{R})$ वास्तविक 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समूह है। $SL_2(\mathbb{R})$ सारणिक 1 वाले वास्तविक 2×2 आव्यूहों का उपसमूह है और $\mathbb{R}^*$ शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समूह है। 5

7. (क) कक्ष-स्थिरक प्रमेय बताइए। यदि X एक परिमित, अरिक्त समुच्चय है और समूह G समूह S(X) का

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

उपसमूह है और $x \in \mathrm{X}$ का अस्तित्व है जिसके लिए

$\left|\underset{\mathrm{G}}{\mathrm{Orb}}\,(x)\right| = 2$, तो दिखाइए कि $\underset{\mathrm{G}}{\mathrm{Stab}}\,(x) \lhd \mathrm{G}$. 3

(ख) मान लीजिए कि :

$$\mathrm{R} = \left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, n = 2^{a}\ 3^{b}, a, b \in \mathbb{Z}, a, b, \geq 0\right\}$$

जाँच कीजिए कि R परिमेय संख्याओं के साधारण जोड़ और गुणन की सापेक्ष वलय है या नहीं। क्या R क्रमचय है ? क्या इसका तत्समक अवयव है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(ग) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है और $p(x) \in \mathrm{F}[x]$, $\deg\ p(x) \geq 2$ । यदि $p(x)$ $\mathrm{F}[x]$ में अखण्डनीय है, तो दिखाइए कि $p(x)$ का F में कोई मूल नहीं है। क्या विलोम सत्य है ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(घ) $m, n, \in \mathbb{Z}$ के लिए दिखाइए कि $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$, जहाँ $l = [m, n]$, n और m का l.c.m. है। 3

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर को एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण के रूप में दीजिए जो भी उचित हो। उचित पुष्टिकरण के साथ ही अंक दिए जाएँगे : 10

(क) अभिलाक्षणिक $p \neq 0$ वाला कोई भी अनन्त क्षेत्र नहीं है।

(ख) एक अनन्त समूह G का अस्तित्व है जिसके सभी अवयवों की कोटि परिमित है।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) प्रत्येक $n \geq 5$ के लिए सममित समूह S_n सरल है।

(घ) किसी क्रमचय वलय R पर किसी भी कोटि $n \geq 1$ बहुपद के अधिकतम n मूल होते हैं।

(ङ) किसी वलय R की प्रत्येक अभाज्य गुणजावली R की उच्चिष्ठ गुणजावली है।

× × × × ×

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

Downloaded from www.IGNOUBABA.com