No. of Printed Pages : 24 **BMTE–141**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP) (BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)

Term-End Examination

December, 2025

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The **eighth** question is compulsory.*

(*iii*) *Do any **six** questions from Question Nos. **1** to **7**.*

(*iv*) *Use of calculator is not allowed.*

(*v*) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

1. (a) Let A be an $m \times n$, B an $n \times k$ and C an $m \times k$ matrix. Which of the following operations are possible ?

   (i) $AB + C$

   (ii) $A^t C + B$

   For those operations that are possible, what will be order of the matrix obtained ? 3

(b) Find the rank and nullity of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

using row reduction. 3

(c) Determine the equation of the plane corresponding to the vector space spanned by the vectors (1, 1, 1) and $(-1, 1, 1)$. 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(d) Check whether the vector :

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

is an eigen vector for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Find the corresponding eigen value. 2

(e) Define the norm of a vector in an inner product space. Find the norm of the vector $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$. 2

(f) Find the magnitude of the volume of the box spanned by the vectors (1, 1, 1), (1, 1, 0) and (0, 1,1). 2

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

2. (a) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the standard basis is :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation. 3

(b) Find the rank and signature for each of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ and $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(c) Let $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ and $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \middle| u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$ be subspaces of $M_2(\mathbf{R})$. Prove that $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$. Is $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer.

3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(d) Let $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ and $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Show that $\{u_1, u_2\}$ forms an orthonormal basis for $\mathbf{R}^2$. Write the vector (3, 2) as a linear combination of u_1 and u_2. 2

(e) Let A be a 4 × 4 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_2 \leftrightarrow 3R_2$

(ii) $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

(f) Find the values of a for which the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is not invertible. 2

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

3. (a) Find the conditions on b_1, b_2 and b_3 so that the following system of equations is consistent : 7

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

(b) Find the adjugate of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Further, find the inverse of A using the adjugate. 5

(c) Is the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon form. 3

4. (a) Check whether the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is diagonalisable, find a diagonal matrix D and an invertible matrix P such that $P^{-1}AP = D$. 8

(b) Let $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ be the linear functional defined by $f((z_1, z_2, z_3)) = z_1 - iz_2 + iz_3$. Find $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{C}^3$ such that : 3

$$f((z_1, z_2, z_3)) = \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle .$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) Apply the coordinate transformation

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ to conic } x^2 + y^2 + 6xy = 1.$$

What is the nature of this conic ? 4

5. (a) Using row reduction, find a basis B for the vector space spanned by the set :

$$S = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 2), (1, 2, 4)\}$$

such that $B \subseteq S$. 4

(b) Show that the linear transformation $T = \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ given by :

$$T((x, y, z)) = (x, y, x + z)$$

is an isomorphism. 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) Let $T = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T((x, y)) = (x - y, x, y)$ and $S = \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $S((x, y, z)) = (x + y, y - z)$. Let B_1 and B_2 be the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, respectively. Check that : 8

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}.$$

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form :

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz.$$

Also, find its principal axes. 9

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, 1, 1), (1, 1, 0) and (2, 2, 1). Also, check whether (2, 1, 1) lies on it. 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(c) Define the coset of a subspace. Let :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

Check whether vectors (3, 1, 2) and (1, 1, 3) are in the same coset of W or not. 3

7. (a) Let $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$, where $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, -1)$ and $u_3 = (1, 1, 0)$. Use Gram-Schmidt orthogonalisation process on B to find an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 5

(b) Let $B = \{(1,0,1), (0,1,-2), (-1,-1,0)\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. 5

(c) Check whether the set :

$$S = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) \middle| a_i \in \mathbf{R}, a_n \le 0\right\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(d) If v_1, v_2 and v_3 are linearly independent vectors in a vector space V over $\mathbf{C}$, show that $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ are also linearly independent. 2

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter-example : 10

(a) Eigen values of a symmetric matrix are real.

(b) If $S_1 \subset S_2$ are subsets of a vector space V and S_2 is linearly independent, S_1 is also linearly independent.

(c) For any linear transformation :

$$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5, \text{Ker}(T) \neq \{0\}.$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(d) Every unitary matrix is Hermitian.

(e) There exists a linear operator $\mathrm{T} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ with characteristic polynomial $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ and minimal polynomial $(x-3)(x-5)$.

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

BMTE–141

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस-सी. एम./ बी. ए. एम./बी. एस-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.ई.–141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : (i) *इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या 1 से 7 तक कोई भी* ***छः*** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

(v) *अपना रफ कार्य उसी पृष्ठ के नीचे या पृष्ठ के किनारे के स्पष्ट रूप से पहचाने जाने योग्य भाग में कीजिए।*

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

1. (क) मान लीजिए A एक $m \times n$, B एक $n \times k$ और C एक $m \times k$ आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन–सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) $AB + C$

(ii) $A^t C + B$

जो संक्रियाएँ साध्य हैं उससे प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगी ? 3

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ की जाति एवं शून्यता प्राप्त कीजिए। 3

(ग) सदिशों (1,1,1) और (–1,1,1) द्वारा विस्तृत सदिश समष्टि के संगत समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(घ) जाँच कीजिए कि सदिश $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ का आइगेन सदिश है या नहीं।

संगत आइगेन मान भी निकालिए। 2

(ङ) आंतर गुणन समष्टि में एक सदिश का मानक परिभाषित कीजिए। सदिश $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$ का मानक निकालिए। 2

(च) सदिश (1, 1, 1), (1, 1, 0) और (0, 1, 1) द्वारा विस्तृत बॉक्स का आयतन का परिमाण क्या है ? 2

2. (क) यदि मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक रूपांतरण निकालिए। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ और $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ के जाति और चिह्नक निकालिए। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ और $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \middle| u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$ $M_2(\mathbf{R})$ की उपसमष्टियाँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$ । क्या $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(घ) मान लीजिए कि $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ और $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ । दिखाइए कि $\{u_1, u_2\}$ $\mathbf{R}^2$ का प्रसामान्य लांबिक आधार है। सदिश (3, 2) को u_1 एवं u_2 के एकघात संचयन के रूप में लिखिए। 2

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ङ) मान लीजिए कि A एक 4 × 4 आव्यूह है। उस प्रारम्भिक आव्यूह को लिखिए जिसको A के बायें तरफ से गुणा करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी : 2

(i) $R_2 \leftrightarrow 3R_2$

(ii) $R_3 \to R_3 - 3R_1$

(च) a के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए आव्यूह

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय नहीं है। 2

3\. (क) b_1, b_2 एवं b_3 पर प्रतिबंध निकालिए जिससे निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है : 7

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए। आगे सहखण्डज का प्रयोग करके A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ग) क्या आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति समानीत रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह आव्यूह पंक्ति समानीत सोपानक रूप में नहीं है, तो पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह को पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानीत कीजिए। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

4. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है। यदि विकर्णनीय है, तो आव्यूह P और विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिसके लिए $P^{-1}AP = D$ । 8

(ख) मान लीजिए कि $f : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ $f((z_1, z_2, z_3)) = z_1 - iz_2 + iz_3$ द्वारा परिभाषित एक रेखिक फलनक है। $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{C}^3$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए : 3

$$f((z_1, z_2, z_3)) = \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$$

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) शांकव $x^2 + y^2 + 6xy = 1$ पर निर्देशांक रूपांतरण

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

लागू कीजिए। इस शांकव की प्रकृति क्या है ? 4

5. (क) पंक्ति समानयन का उपयोग करते हुए समुच्चय $S = \{(1,-1,1),(-1,1,2),(1,2,4)\}$ द्वारा विस्तृत सदिश समष्टि के लिए एक आधार B निकालिए जिसके लिए $B \subseteq S$ । 4

(ख) दिखाइए कि रैखिक रूपांतरण $T = \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, जो $T((x, y, z)) = (x, y, x + z)$ द्वारा परिभाषित है, एक तुल्यकारिता है। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) मान लीजिए कि $\mathrm{T} = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $\mathrm{T}((x, y)) = (x - y, x, y)$ द्वारा परिभाषित है और $\mathrm{S} = \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $\mathrm{S}((x, y, z)) = (x + y, y - z)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2 क्रमशः, $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि : 8

$$[\mathrm{T} \circ \mathrm{S}]_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{B}_2} = [\mathrm{T}]_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{B}_1} \cdot [\mathrm{S}]_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{B}_2}$$

6\. (क) द्विघात समघात $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 9

(ख) बिन्दुओं (1, 1, 1), (1, 1, 0) और (2, 2, 1) से निर्धारित समतल का सदिश समीकरण निकालिए। यह भी जाँच कीजिए कि (2, 1, 1) उस समतल पर स्थित है। 3

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) एक समुच्चय का सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए।

मान लीजिए :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

जाँच कीजिए कि सदिश (3, 1, 2) और (1, 1, 3) W के एक ही सहसमुच्चय में हैं या नहीं। 3

7. (क) मान लीजिए $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का क्रमित आधार है, जहाँ $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, -1)$ और $u_3 = (1,1,0)$। B पर ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण विधि का प्रयोग करके $\mathbf{R}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $B = \{(1,0,1), (0,1,-2), (-1,-1,0)\}$ $\mathbf{R}^3$ का एक आधार है। B का द्वैत आधार निकालिए। 5

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय :

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in \mathbf{R}, a_n \leq 0\}$$

$\mathbf{R}^n$ का उपसमुच्चय है या नहीं। 3

(घ) यदि v_1, v_2 एवं v_3 $\mathbf{C}$ पर एक सदिश समष्टि V में रैखिकतः स्वतन्त्र सदिश हैं, तो दिखाइये कि $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ भी रैखिकतः स्वतन्त्र हैं। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा कीजिए : 10

(क) एक सममित आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक हैं।

(ख) यदि $S_1 \subset S_2$ एक सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय हैं और S_2 रैखिकतः स्वतन्त्र है, तो S_1 भी रैखिकतः स्वतन्त्र है।

Downloaded from www.IGNOUBABA.com

(ग) कोई भी रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ के लिए $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ ।

(घ) कोई भी ऐकिक आव्यूह हर्मिटीय है।

(ङ) एक ऐसा रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ है जिसका अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ है और न्यूनतम बहुपद $(x-3)(x-5)$ है।

× × × × ×

Downloaded from www.IGNOUBABA.com