

No. of Printed Pages : 15

BMTC-133

**BACHELOR OF SCIENCE
(GENERAL)/BACHELOR OF ARTS
(GENERAL) (BSCG/BAG)**

Term-End Examination

June, 2025

BMTC-133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) Question No. 1 is **compulsory**.

Do any **six** questions from Q. Nos. 2
to 8.

(ii) Use of calculator is **not** allowed.

-
-
1. Which of the following statements are **True**
or **False** ? Give reason for your answer in
the form of a short proof or a counter-

C-2516/BMTC-133

P. T. O.

example, whichever is appropriate for each statement :

$$5 \times 2 = 10$$

(a) -2 is not a limit point of the empty set ϕ .

(b) If $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is a convergent sequence,

then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series.

(c) Every continuous function is differentiable.

(d) Every integrable function is monotonic.

(e) The set $S = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^2} : n \in \mathbf{N} \right\}$ is bounded above.

2. (a) For any subset S of $\mathbf{R}$, show that $\bar{S}$ is a closed set. 5

- (b) Find the radius of convergence of a series $\sum a_n x^n$, where $a_n = \frac{n!}{n^n}$. 6

- (c) Test the series $\sum \frac{n^{5/2}}{4n^3 - 3n^2}$ for convergence. 4

3. (a) Show that $f(x) = x^3$ is Riemann integrable on $[0, 1]$. Deduce that

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \quad 5$$

- (b) Show that the series $\sum \frac{\sin(n^3 x)}{n^{5/2}}$ is uniformly convergent on $[0, \infty[$. 5

- (c) Using the definition of limit, prove that

$$\left(\frac{(\sin 2n + \cos 3n)}{n} \right)_{n \in \underline{\mathbf{N}}} \text{ converges to zero.}$$

5

4. (a) Find infimum and supremum of the set

$$S = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}, \text{ if the same exist.} \quad 5$$

- (b) Check whether the series $\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} \cdot 3^n$

is convergent or not. 5

- (c) Let a function f be defined as : 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Is f continuous at $x = 2$? If not, find the nature of discontinuity and redefine f to make it continuous, if possible.

5. (a) Prove the following : 5

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \sin x}{x + 2 \cos x} = 1$$

(b) Apply Cauchy integral test to find : 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right].$$

(c) Prove or disprove the following : 5

“The set of rational numbers is countable.”

6. (a) Show that the series Σa_n , where

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}, \text{ diverges.} \quad 4$$

(b) Show that the equation

$2x^3 - 18x + 7 = 0$, does not have two distinct real roots in the interval $[-1, 1]$. 5

(c) Prove or disprove the following statements : 6

(i) The sequence $\left(\frac{\cos n}{n} \right)_{n \in \underline{\mathbf{N}}}$

converges.

(ii) Every sequence, which is not monotone, diverges.

7. (a) Prove that $\sqrt{10}$ is not a rational number. 5

(b) Evaluate : 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n!)^3}{(3n)!} \right]^{\frac{1}{n}}$$

- (c) Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be the Dirichlet function, defined by : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0,1] \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \in [0,1] \text{ is irrational} \end{cases}.$$

Check whether the function f is Riemann integrable ?

8. (a) Prove that $1 - x > e^{-x}$, if $x > 0$. 5

- (b) Find Maclaurin's series for $\sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

5

- (c) For the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where

$$f_n : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \frac{\cos 2nx}{n^3}, \quad \text{check}$$

whether or not, it is uniformly convergent on $[0, 1]$. 5

BMTC-133

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 8 तक
किन्हीं छः प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य
हैं ? प्रत्येक कथन के अपने उत्तर के लिए, एक संक्षिप्त

उपपत्ति या एक प्रति-उदाहरण के रूप में (जो भी उपयुक्त

हो) कारण दीजिए :

$$5 \times 2 = 10$$

(क) -2 , रिक्त समुच्चय ϕ का एक सीमा बिंदु नहीं है।

(ख) यदि $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ एक अभिसारी अनुक्रम है, तो

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ एक अभिसारी श्रेणी है।}$$

(ग) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय फलन होता है।

(घ) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है।

(ङ) समुच्चय $S = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ उपरितः परिबद्ध

है।

2. (क) $\mathbf{R}$ के किसी उपसमुच्चय S के लिए, दर्शाइए कि $\bar{S}$

एक संवृत समुच्चय है। 5

(ख) श्रेणी $\sum a_n x^n$ की अभिसारिता की त्रिज्या ज्ञात

कीजिए, जहाँ $a_n = \frac{n!}{n^n}$ है। 6

(ग) श्रेणी $\sum \frac{n^{5/2}}{4n^3 - 3n^2}$ की अभिसारिता के लिए जाँच

कीजिए। 4

3. (क) दर्शाइए कि $f(x) = x^3$ रीमान समाकलनीय अंतराल

$[0, 1]$ पर रीमान समाकलनीय है। व्युत्पत्ति कीजिए

कि $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ है। 5

(ख) दर्शाइए कि श्रेणी $\sum \frac{\sin(n^3 x)}{n^{5/2}}$ अंतराल $[0, \infty[$ पर

एकसमानतः अभिसारी है। 5

(ग) सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए

कि $\left(\frac{(\sin 2n + \cos 3n)}{n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ शून्य में अभिसरित

होता है।

5

4. (क) समुच्चय $S = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ के निम्निष्ठ और

उच्चिष्ठ ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व है।

5

(ख) जाँच कीजिए कि श्रेणी $\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} \cdot 3^n$

अभिसारी है या नहीं।

5

(ग) मान लीजिए कि :

5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

के रूप में फलन f परिभाषित है। क्या $x = 2$ पर f संतत है ? यदि नहीं, तो असंततता की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा यदि संभव है, तो f को संतत बनाने के लिए उसे पुनःपरिभाषित कीजिए।

5. (क) निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

5

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2\sin x}{x + 2\cos x} = 1$$

$$(ख) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right] \text{ ज्ञात करने के लिए, कौशी}$$

समाकल परीक्षण का अनुप्रयोग कीजिए।

5

(ग) निम्नलिखित को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 5

“परिमेय संख्याओं का समुच्चय गणनीय है।”

6. (क) दर्शाइए कि श्रेणी Σa_n अपसारी है, जहाँ

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2} \text{ है।} \quad 4$$

(ख) दर्शाइए कि समीकरण $2x^3 - 18x + 7 = 0$ के

अंतराल $[-1, 1]$ में दो भिन्न-भिन्न वास्तविक मूल

नहीं हैं। 5

(ग) निम्नलिखित कथनों को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 6

(i) अनुक्रम $\left(\frac{\cos n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ अभिसारी है।

(ii) प्रत्येक अनुक्रम, जो एकदिष्ट नहीं है, अपसारी होता है।

7. (क) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{10}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। 5

(ख) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n!)^3}{(3n)!} \right]^{\frac{1}{n}}$ का मान निकालिए। 5

(ग) मान लीजिए कि $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ डिरिचलेट फलन

है, जो : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \in [0, 1] \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } x \in [0, 1] \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि क्या यह फलन f

रीमान समाकलनीय है ?

8. (क) सिद्ध कीजिए कि $1 - x > e^{-x}$ है, यदि $x > 0$ है। 5

(ख) $\sin x, \forall x \in \mathbf{R}$ के लिए मैक्लॉरिन श्रेणी ज्ञात

कीजिए। 5

(ग) अनुक्रम $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ के लिए; जहाँ $f_n : [0,1] \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$,

$$f_n(x) = \frac{\cos 2nx}{n^3} \text{ है; जाँच कीजिए कि यह } [0, 1]$$

पर एकसमानतः अभिसारी है या नहीं।

5

× × × × ×